



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Introdução à Teoria dos Grafos

por

Gildson Soares de Melo

sob orientação do

Professor Dr. Napoleón Caro Tuesta

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014
João Pessoa - PB

Introdução à Teoria dos Grafos

por

Gildson Soares de Melo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa - UFPB

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano - UFPE

Agosto/2014

Agradecimentos

Quero agradecer a Deus pelo dom da vida e por me possibilitar alcançar mais esta conquista.

À minha esposa Thalita Rafaela da Silva Borges Soares pelo amor e apoio incondicional nesta jornada do Mestrado e por estar ao meu lado em todas as decisões da minha vida.

Aos meus pais Gildo José de Melo e Ivanilza Soares de Melo por serem minha base e por todo amor, carinho e apoio que me fez ser o homem que sou hoje.

À minha irmã Gabriela Soares de Melo pelo seu amor fraternal.

À minha sobrinha e afilhada Lara Soares de Melo Bezerra Leite por sua doçura de criança que me alegra todos os dias.

À Coordenação e todos os Professores do PROFMAT.

Ao Coordenador do PROFMAT Professor Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro por todo suporte e apoio no decurso deste Mestrado.

Aos membros da Banca, em especial ao meu Orientador Professor Dr. Napoleón Caro Tuesta, por toda a força dada nestes dois anos de Mestrado, pelas contribuições, sugestões, críticas que contribuíram para elaboração deste Trabalho de Conclusão de Curso.

A todos os demais familiares e amigos pelo apoio e torcida de sempre.

Aos meus amigos da turma 2012 do PROFMAT, em especial aos amigos con-gruentes: Alessandro Mignac, Washington, Magnum, Cybele e André, e as amigas Mayana Cybele e Edjane pelos estudos, pela amizade e pela força que me foi dada na caminhada do Mestrado PROFMAT.

Aos meus amigos do Banco do Nordeste do Brasil (BNB) por todo apoio, incentivo e força na condução deste Mestrado.

Dedicatória

A minha esposa Thalita Rafaela da Silva Borges Soares, pelo amor, suporte e apoio nesta jornada do Mestrado. Aos meus pais, Gildo José de Melo e Ivanilza Soares de Melo, pelo amor que me dão todos os dias.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo introdutório sobre Teoria dos Grafos, considerando sua relevância para o ensino da Matemática. Inicialmente é apresentado um breve histórico sobre a Teoria dos Grafos. Em seguida, o capítulo 1 é constituído por algumas definições sobre grafos e exemplos, o capítulo 2 trata dos caminhos, passeios e ciclos num grafo, destacando-se os passeios Eulerianos e os ciclos Hamiltonianos, abordamos também um tipo especial de grafos, as árvores. No capítulo 3 abordamos a planaridade nos grafos, apresentando assim a Fórmula de Euler. Finalmente no capítulo 4 apresentamos alguns problemas envolvendo grafos.

Abstract

This paper presents an introductory study of graph theory, considering its relevance to the teaching of mathematics. Initially presents a brief history on Graph Theory. Then the first chapter consists of some definitions on graphs and examples, the second chapter deals with the paths, walks and cycles in a graph, highlighting the Eulerian tours and Hamiltonian cycles, also boarded a special type of graphs, trees . In Chapter 3 we address the planarity in graphs, thus presenting Euler's Formula. Finally in Chapter 4 we present some problems involving graphs.

Sumário

1	Grafos	1
1.1	Definições	1
1.2	Alguns Exemplos de Grafos	6
2	Passeios, Caminhos, Ciclos e Árvores	8
2.1	Ideias Básicas	8
2.2	Passeios Eulerianos	11
2.3	Ciclos Hamiltonianos	12
2.4	Árvores	13
3	Planaridade	16
3.1	Representações e Cruzamentos	16
3.2	Fórmula de Euler	18
4	Alguns Problemas Envolvendo Grafos	20
4.1	O Problema das Pontes de Königsberg	20
4.2	O Problema Chinês do Carteiro	22
4.3	O Problema das 4 Cores	23
	Referências Bibliográficas	25

Introdução

A Teoria dos Grafos tem uma origem relativamente recente (século XVIII) na história da Matemática. Desenvolvida já no século XX, cuja importância se tem imposto por suas ligações e aplicações em outras ciências, bem como em outras áreas da Matemática.

Informalmente, um grafo pode ser visto como um conjunto de *pontos*, chamados **vértices**, e outro de *pares desses pontos*, chamados **arestas**; cada aresta liga um par de pontos (extremidades) que a determina. A representação usual é feita por linhas (arestas) a ligar pontos do plano (vértices).

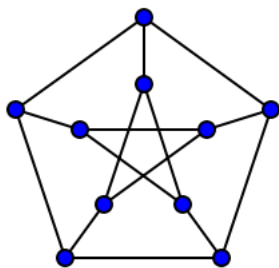


Figura 1: Representação de um grafo

Tal conceito simples torna claro que ele permite a modelagem de situações concretas como: redes de computadores, de comunicações, a Web (ligação física entre os nós da rede), árvores genealógicas, Química Orgânica (isômeros) etc.

Contudo, a ligação física não é necessária; também pode ser associado um grafo a um qualquer conjunto no qual esteja definida uma relação binária, como a relação (a é primo com b) que determina um grafo num conjunto fixado de inteiros, ou a relação (a é filho de b) que permite associar a uma dada família um grafo (árvore genealógica).

O termo grafo foi usado pela primeira vez por James Joseph Sylvester num artigo publicado em 1877, na *Nature*.



Figura 2: James Joseph Sylvester

No entanto, apesar desta primeira data de referência ao termo grafo e de sua definição formal só surgir no século XX, a resolução de Euler do Problema das Pontes de Königsberg, publicada em 1736, é referida como a primeira publicação da teoria.



Figura 3: Leonhard Euler

O problema é baseado na cidade de Königsberg (território da Prússia até 1945, atual Kaliningrado), que é cortada pelo Rio Prególia, onde há duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete pontes, conforme mostra a figura abaixo. Das sete pontes originais, uma foi demolida e reconstruída em 1935, duas foram destruídas durante a Segunda Guerra Mundial e outras duas foram demolidas para dar lugar a uma única via expressa. Atualmente apenas duas pontes são da época de Leonhard Euler.

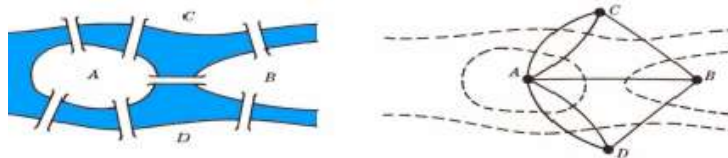


Figura 4: As Pontes de Königsberg e sua representação em grafo

Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma. Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando Euler, em 1736, provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.

Euler usou um raciocínio muito simples. Transformou os caminhos em retas e suas intersecções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história. Então percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos. A razão de tal coisa é que de cada ponto deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para "entrar" e outro para "sair". Os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Se não houver pontos com número ímpar de caminhos, pode-se (e deve-se) iniciar e terminar o trajeto no mesmo ponto, podendo esse ser qualquer ponto do grafo. Isso não é possível quando temos dois pontos com números ímpares de caminhos, sendo obrigatoriamente um o início e outro o fim.

Duas das sete pontes originais da cidade foram destruídas durante do bombardeamento de Königsberg em agosto de 1944.

Capítulo 1

Grafos

1.1 Definições

Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [1], [2] e [3].

Definição 1.1 *Um grafo (simples) G consiste de um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de objetos chamados **vértices**, juntamente com um conjunto $E(G)$ de pares não ordenados de vértices; os elementos de $E(G)$ são chamados de **arestas**. Podemos representá-lo por $G = (V; E)$, onde $V = V(G)$ e $E = E(G)$.*

Se $G = (V; E)$ é um grafo e u e v são dois de seus vértices, diremos que u e v são adjacentes se $\{u, v\} \in E$; neste caso, dizemos ainda que a aresta $\{u, v\}$ incide nos vértices u e v . Podemos denotar a aresta $\{u, v\}$ simplesmente por uv , sempre que não houver perigo de confusão. Se u e v não forem adjacentes, diremos que são vértices não adjacentes de G .

Grafos são geralmente representados por diagramas, onde os elementos de V correspondem a pontos no plano e as arestas de G correspondem a arcos ligando os vértices correspondentes. A figura assim obtida não tem nenhum significado geométrico, seu propósito sendo somente o de representar esquematicamente as relações de adjacência entre os vértices de G . Por exemplo, se

$$G = (\{a, b, c, d\}; \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}),$$

então G pode ser representado por qualquer um dos diagramas abaixo, haja vista que ambos encerram as mesmas relações de adjacência.

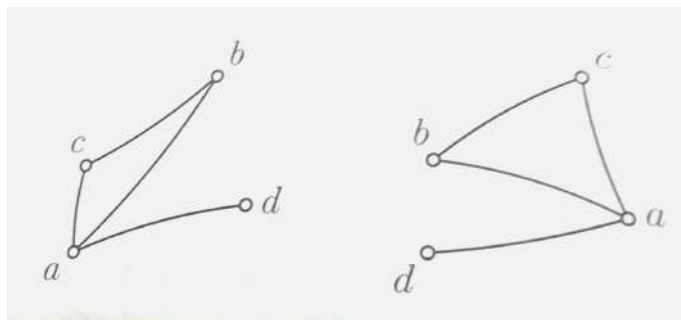


Figura 1.1: representações de um grafo.

Definição 1.2 Um **grafo trivial** é um grafo no qual $G = (V; \emptyset)$, ou seja, é um grafo que possui n vértices, podendo ser representado por conjunto de n pontos no plano, sem quaisquer arcos (arestas).

Definição 1.3 Um **grafo completo** é um grafo que possui n vértices, com dois quaisquer deles conectados por um arco. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n ; em particular, K_n tem exatamente $\binom{n}{2}$ arestas.

Definição 1.4 Fixado um vértice u de G , denotamos por $N_G(u)$ o conjunto dos vértices adjacentes (ou vizinhos) a u : $N_G(u) = \{v \in V; uv \in E\}$.

Definição 1.5 Seja $G = (V, E)$ um grafo. Se $u \in V$, o **grau** de u , denotado $d_G(u)$, é o número de vértices adjacentes a u :

$$d_G(u) = \#N_G(u).$$

Teorema 1.1 (Euler) Em um grafo $G = (V; E)$, a soma dos graus dos vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos:

$$2|E| = \sum_{u \in V} d_G(u). \quad (1.1)$$

Prova.

Utilizemos contagem dupla. Basta observar se $\epsilon = \{u, v\}$ é uma aresta de G , então ϵ é contada exatamente duas vezes no segundo membro de (1.1): uma vez na parcela $d_G(u)$ e outra na parcela de $d_G(v)$. Portanto, o segundo membro tem de ser igual a $2|E|$, já que tal número também conta cada aresta exatamente duas vezes. ■

Corolário 1.1 (Euler) *Em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Prova.

Considere o grafo $G = (V, E)$. Denotando por d_i o grau do vértice i , temos, do Teorema de Euler:

$$2|E| = \sum_{i \in N} d_i = \sum_{i \in N | d_i \text{ par}} d_i + \sum_{i \in N | d_i \text{ mpar}} d_i$$

Separamos o somatório em duas parcelas, a primeira contendo os graus pares e a segunda os ímpares. Então, a primeira parcela é par, mas como a soma das duas parcelas também é par (o dobro da cardinalidade de E), a segunda parcela também é par. Observe agora que, para ter uma soma de parcelas ímpares resultando em um número par, devemos ter um número par de parcelas, o que conclui a demonstração. ■

Definição 1.6 *Dois grafos $G = (V_1; E_1)$ e $H = (V_2; E_2)$ são **isomorfos** se existir uma bijeção $f : V_1 \rightarrow V_2$ que preserva incidência, i.e., tal que, para vértices distintos quaisquer u e v de G , tenhamos*

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

Nesse caso, denotamos $G_1 \simeq G_2$.

Proposição 1.1 *Dois grafos isomorfos têm quantidade iguais de vértices de um mesmo grau. Em particular, têm quantidades iguais de vértices e quantidades iguais de arestas.*

Prova.

Sejam $G = (V_1; E_1)$ e $H = (V_2; E_2)$ grafos isomorfos e $f : V_1 \rightarrow V_2$ uma bijeção que preserva incidência. Se u é um vértice de G com grau $k \geq 0$, é imediato que $f(u)$ é um vértice de H com grau k , e reciprocamente. Portanto, G e H têm quantidades iguais de vértices de grau k , digamos a_k , de maneira que

$$|V_1| = \sum_{k \geq 0} a_k = |V_2|.$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Euler duas vezes, juntamente com a primeira parte acima, obtemos

$$2|E_1| = \sum_{u \in V_1} d_G(u) = \sum_{u \in V_1} d_H(f(u)) = \sum_{f(u) \in V_2} d_H(f(u)) = 2|E_2|$$

e, daí $|E_1| = |E_2|$. ■

Exemplo 1.1 Se $G = (V; E)$ for um grafo de n vértices, podemos, sempre que necessário, supor que $V = I_n$. De fato, como $|V| = n$, podemos escolher uma bijeção $f : V \rightarrow I_n$ e definir $H = (I_n; F)$ pondo, para $i \neq j$ em I_n ,

$$\{i, j\} \in F \Leftrightarrow \{f^{-1}(i), f^{-1}(j)\} \in E.$$

Definição 1.7 Dado um grafo $G = (V; E)$, com $|V| = n$, suponha, de acordo com o exemplo acima, que $V = I_n$. A **matriz de adjacência** de G é a matriz $Adj(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \neq j \text{ e } \{i, j\} \in E \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

Lema 1.1 A matriz de adjacência de um grafo é simétrica, com zeros na diagonal principal.

Prova.

Nas notações da definição acima, temos para $i \neq j$ em I_n que

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{i, j\} \in E \Leftrightarrow \{j, i\} \in E \Leftrightarrow a_{ji} = 1;$$

portanto, $Adj(G)$ é simétrica. O resto é imediato a partir da definição acima. ■

Exemplo 1.2 Tomemos como exemplo o grafo da figura 1.1 acima, a matriz de adjacência deste grafo é:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 1.8 Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G se $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$. O grafo H é um **subgrafo gerador** de G se H for um subgrafo de G tal que $V(H) = V(G)$.

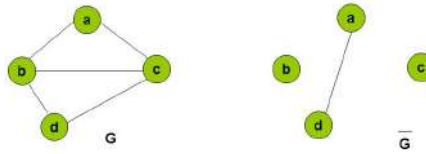


Figura 1.2: O grafo G e seu complementar.

Definição 1.9 Se $G = (V; E)$ é um grafo, seu **grafo complementar** é o grafo $\bar{G} = (V; E^c)$, onde E^c denota o complementar de E .

Definição 1.10 Um grafo $G = (V; E)$ é **bipartido** se pudermos escrever $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos disjuntos, não vazios e independentes.

Na teoria dos grafos, um **conjunto independente** de um grafo G é um conjunto S de vértices de G tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S . Em outras palavras, se a e b são vértices quaisquer de um conjunto independente, não há aresta entre a e b .

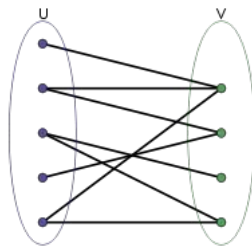


Figura 1.3: Grafo bipartido.

Definição 1.11 Um grafo é **r -regular** se todos os vértices de G tem grau r .

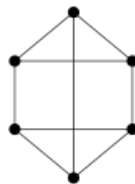


Figura 1.4: Grafo 3-regular.

1.2 Alguns Exemplos de Grafos

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [4].

Exemplo 1.3 *Os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez (generalizado) com t linhas e t colunas (no tabuleiro usual, t vale 8). Dois vértices são adjacentes se uma rainha do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento. Esse é o grafo dos movimentos da rainha, ou simplesmente o grafo da rainha. Para deixar claras as dimensões do tabuleiro, podemos dizer que esse é o grafo da rainha t por t . Por analogia, definem-se o grafo do rei, o grafo do bispo, o grafo do cavalo e o grafo da torre t por t .*

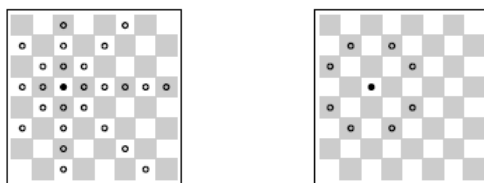


Figura 1.5: Tabuleiros de xadrez 8 por 8. A figura esquerda representa o grafo da rainha e a da direita representa o grafo do cavalo.

Exemplo 1.4 *O grafo dos estados do Brasil é definido assim: cada vértice é um dos estados da República Federativa do Brasil; dois estados são adjacentes se têm uma fronteira comum.*

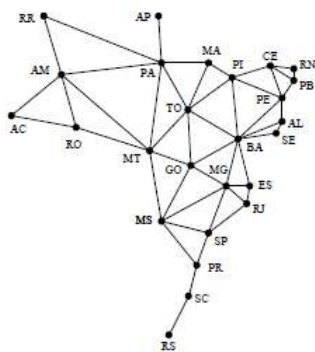


Figura 1.6: Grafo dos estados do Brasil.

Exemplo 1.5 *Os hidrocarbonetos conhecidos como alcanos têm fórmula química C_pH_{2p+2} , onde C e H representam moléculas de carbono e hidrogênio respectivamente. As moléculas de alcanos podem ser representadas por grafos como os da figura abaixo.*

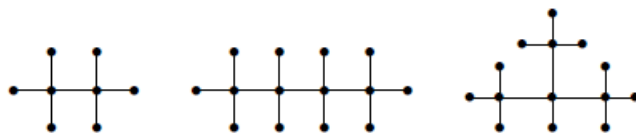


Figura 1.7: Etano (C_2H_6), butano (C_4H_{10}) e isobutano (C_4H_{10}). Os vértices em que incide uma só aresta representam átomos de hidrogênio, os demais representam átomos de carbono.

Capítulo 2

Passeios, Caminhos, Ciclos e Árvores

2.1 Ideias Básicas

Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [1], [2] e [3].

Definição 2.1 Um passeio de comprimento $k \geq 1$ em um grafo G é uma sequência $\mathcal{P} = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ de vértices (não necessariamente distintos) de G tal que u_{i-1} é adjacente a u_i para $1 \leq i \leq k$. O passeio \mathcal{P} acima é **fechado** se $u_0 = u_k$, podemos chamar o passeio fechado de **circuito**.



Figura 2.1: Um passeio e um circuito.

Definição 2.2 Um grafo é **conexo** se existir um passeio entre dois quaisquer de seus vértices. Um grafo que não é conexo é dito **desconexo**.

A proposição seguinte define um critério simples para um grafo ser conexo. Para o enunciado dela, precisamos introduzir a seguinte notação: dado um grafo $G = (V; E)$, o **grau mínimo** de G é o inteiro não negativo

$$\delta(G) = \min\{d_G(u); u \in V(G)\}. \quad (2.1)$$

Proposição 2.1 Se G é um grafo com n vértices e tal que $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então G é conexo.

Prova.

Se $n = 1$ ou $n = 2$, não há nada a fazer. Suponha $n > 2$ e sejam u e v vértices distintos de G . Caso u e v sejam adjacentes, nada há a fazer. Do contrário, como

$$d_G(u) + d_G(v) \geq 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor > n - 2 = \#(V(G) \setminus \{u, v\}),$$

o princípio da casa dos pombos ¹ garante a existência de um vértice $w \neq u, v$, adjacente a ambos u e v . Logo, o passeio (u, w, v) liga u a v . ■

Definição 2.3 *Um caminho em um grafo é um passeio tal que todos os seus vértices são distintos.*

Apesar de todo caminho ser um passeio, é imediato que, em geral, há passeios que não são caminhos. No entanto, não é difícil nos convenceremos que se há um passeio entre dois vértices de um grafo, então também há um caminho entre eles. Isto motiva o teorema abaixo.

Teorema 2.1 *Se houver um passeio do vértice y ao vértice z no grafo G , onde y não é igual a z , então há um caminho em G com primeiro vértice y e último vértice z . (Em outras palavras, se há um passeio entre dois vértices de um grafo, há também um caminho entre os mesmos.)*

Prova.

Chamemos o passeio- yz de

$$W_1 = x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, a_n, x_n,$$

como acima, onde $y = x_0$ e $z = x_n$. Se os vértices x_0, x_1, \dots, x_n são todos diferentes, W_1 é um caminho e não há nada a provar. Se não, selecione um vértice que aparece duas vezes: chame $x_i = x_j$, onde $i < j$. Escreva

$$W_2 = x_0, a_1, x_1, \dots, x_i, a_{j+1}, x_{j+1}, \dots, a_n, x_n.$$

Então W_2 é um passeio de y para z e é mais curto do que W_1 .

Se W_2 não contém vértice repetido, então é necessariamente caminho. Caso contrário, selecione um vértice repetido, e proceda como acima. Mais uma vez um passeio mais curto é construído.

¹O princípio da casa dos pombos, também conhecido como princípio das gavetas ou princípio de Dirichlet, pode ser enunciado da seguinte forma: Se temos de distribuir n pombos em $n-1$ gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, dois pombos.

Este processo deve parar num dado momento, uma vez que cada passeio é menor do que o anterior e o comprimento não pode ser inferior a 1. Assim, para alguns k , W_k não pode ser reduzida em comprimento. Portanto W_k não contém vértice repetido e é necessariamente caminho. ■

Definição 2.4 Um **k-ciclo** em um grafo G é um passeio fechado

$$(u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$$

em G , de comprimento $k \geq 3$ e tal que $(u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ é um caminho.

Definição 2.5 Um grafo G é **bipartido** se todo ciclo em G tem comprimento par.

Prova.

Suponha inicialmente que G é bipartido, com conjuntos independentes de vértices V_1 e V_2 . Se $\mathcal{C} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k, u_0)$ é um ciclo em G , então a independência dos conjuntos V_1 e V_2 garante que os vértices u_i e u_{i+1} alternam-se entre os conjuntos V_1 e V_2 . Em particular, o caminho (u_0, u_1, \dots, u_k) dá k alternâncias entre V_1 e V_2 para, partindo de u_0 , chegarmos a u_k . Mas como u_k e u_0 são adjacentes, não podem pertencer a um mesmo dos conjuntos V_1, V_2 e, daí, k deve ser ímpar. Portanto, o comprimento de $k + 1$ de \mathcal{C} é par. Reciprocamente, suponha que todo ciclo em G tenha comprimento par e mostremos que G é bipartido fazendo indução sobre seu número de arestas. Se G contiver algum ciclo \mathcal{C} , retire uma aresta $\epsilon = \{u, v\}$ de \mathcal{C} . Como não foram criados novos ciclos, $G - \epsilon$ ainda é tal que todos os seus ciclos têm comprimento par. Portanto, pela hipótese de indução, $G - \epsilon$ é bipartido, digamos com conjuntos independentes de vértices V_1 e V_2 . Note agora que o caminho $\mathcal{C} - \epsilon$ em $G - \epsilon$ liga u a v e tem comprimento ímpar; uma vez que seus vértices se alternam entre V_1 e V_2 , segue que $u \in V_1$ e $v \in V_2$, ou vice-versa. Logo, G também é bipartido, também com conjuntos independentes de vértices V_1 e V_2 . ■

2.2 Passeios Eulerianos

Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [1], [2] e [3].

Definição 2.6 Um passeio Euleriano em um grafo conexo é um passeio fechado que usa cada aresta do grafo exatamente uma vez. Um grafo conexo é **Euleriano** se contiver um passeio Euleriano.

Seja G um grafo Euleriano e \mathcal{P} um passeio Euleriano em G . Fixado arbitrariamente um vértice u de G , se $k \geq 1$ é o número de ocorrências de u em \mathcal{P} , então é claro que $d_G(u) = 2k$, um número par. Portanto, uma condição necessária para que um grafo conexo G seja Euleriano é que todos os vértices de G tenham grau par. O teorema seguinte garante que tal condição também é suficiente para um grafo ser Euleriano.

Lema 2.1 Se G é um grafo conexo no qual todo vértice tem grau par, então G contém um passeio fechado que não atravessa uma mesma aresta duas vezes.

Prova.

Escolha um vértice u_0 de G e, a partir de u_0 , crie um passeio em G repetindo, enquanto possível, o seguinte algoritmo: estando em um vértice u_{k-1} de G , $k \geq 1$, escolha um vértice u_k adjacente a u_{k-1} e tal que a aresta $\{u_{k-1}, u_k\}$ ainda não tenha sido atravessada. Para mostrar que esse algoritmo gera um passeio fechado em G que não atravessa uma mesma aresta duas vezes, suponha que, após a execução de um certo número de passos estejamos em um vértice u_k de G . Há duas possibilidades:

1. $u_k = u_0$: nada há a fazer, pois o passeio desejado é (u_0, u_1, \dots, u_k) .
2. $u_k \neq u_0$: suponha que o vértice u_k já apareceu (com índices menores) outras l vezes; então usamos exatamente $2l + 1$ dentre as arestas incidentes em u_k (duas arestas para cada uma das l ocorrências anteriores, mais uma aresta para chegar em u_k a partir de u_{k-1}). Mas como u_k tem grau par, existe pelo menos uma aresta incidente em tal vértice e ainda não utilizada; portanto, o algoritmo não para em u_k .

Por fim, como o número de arestas de G é finito, a discussão acima garante que o algoritmo para em u_0 e, ao parar, teremos um passeio fechado G que não atravessa uma mesma aresta duas vezes. ■

Teorema 2.2 (Euler) Um grafo conexo e não trivial G é Euleriano se e só se todos os seus vértices têm grau par.

Prova.

Já vimos que, se G é Euleriano, então todos os seus vértices têm grau par. Para estabelecer a recíproca, façamos indução em relação ao número de arestas de G . A condição do enunciado implica que G tem pelo menos três arestas; ademais, se G tiver exatamente três arestas, então G é isomorfo a K_3 , o qual é claramente Euleriano. Suponha agora que G tem $n > 3$ arestas, e que o teorema é verdadeiro para grafos conexos com menos de n arestas, nos quais todos os vértices têm grau par. Pelo lema anterior, podemos tomar em G um passeio fechado $\mathcal{P} = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$ que não atravessa uma mesma aresta duas vezes. Sejam H_1, \dots, H_l as componentes conexas não triviais de $G - A$, onde A é o conjunto das arestas de \mathcal{P} . Se um vértice u de H_i ocorre $j \geq 0$ vezes em \mathcal{P} , então

$$d_G(u) = d_{H_i}(u) + 2j;$$

de modo que $d_{H_i}(u)$ é par. Como isso é válido para todos $1 \leq i \leq l$ e u , segue que H_1, \dots, H_l satisfazem as hipóteses do teorema.

Como cada H_i tem menos arestas que G , segue da hipótese de indução a existência de um passeio Euleriano \mathcal{P}_i para H_i . A ideia agora é colar os passeios Eulerianos $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l$ um a um a \mathcal{P} , obtendo, assim um passeio Euleriano para G . Para tanto, note que \mathcal{P} e \mathcal{P}_1 têm pelo menos um vértice comum, digamos u . Podemos supor, sem perda de generalidade, que \mathcal{P} e \mathcal{P}_1 começam e terminam em u (mudando os pontos de partida de ambos esses passeios, se necessário). Portanto, seguindo \mathcal{P} e em seguida \mathcal{P}_1 , obtemos um passeio \mathcal{P}'_1 em G que engloba todas as arestas de \mathcal{P} e de \mathcal{P}_1 e não passa duas vezes por uma mesma aresta. Basta agora repetir o argumento acima mais $l-1$ vezes, colando \mathcal{P}_2 a \mathcal{P}'_1 para obter um passeio \mathcal{P}'_2 e assim por diante. O passeio \mathcal{P}'_l obtido no final é um passeio Euleriano em G . ■

2.3 Ciclos Hamiltonianos

Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [1], [2] e [3].

Definição 2.7 Um ciclo Hamiltoniano em um grafo é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo. Um grafo conexo é **Hamiltoniano** se contiver um ciclo Hamiltoniano.

O problema da existência ou não de ciclos Hamiltonianos em grafos é muito mais difícil que o problema correspondente para passeios Eulerianos; de fato, até hoje não existe um conjunto de condições necessárias e suficientes simples para um grafo ser Hamiltoniano. O teorema a seguir, devido ao matemático húngaro do século XX Gabriel Dirac, dá uma condição suficiente simples para a existência de ciclos Hamiltonianos.

Teorema 2.3 (Dirac) *Se G é um grafo com $n \geq 3$ vértices e tal que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é Hamiltoniano.*

Prova.

Pela proposição 2.1, G é conexo. Seja agora $\mathcal{P} = (u_0, \dots, u_k)$ um caminho maximal em G (i.e., tal que não há outro de comprimento maior). Se v for um vizinho de u_0 que não pertence a \mathcal{P} , podemos trocar \mathcal{P} por $\mathcal{P}_1 = (v, u_0, \dots, u_k)$, obtendo um caminho maior que \mathcal{P} , o que é uma contradição. Portanto, \mathcal{P} inclui todos os vértices de u_0 e, analogamente, todos os vizinhos de u_k . Em particular, \mathcal{P} tem comprimento maior ou igual a $\frac{n}{2}$.

Afirmamos agora que existe um índice $0 \leq i \leq k-1$ tal que u_0 é adjacente a u_{i+1} e u_i é adjacente a u_k . Para tanto, sejam $A = \{0 \leq i \leq k-1; u_{i+1} \in N_G(u_0)\}$ e $B = \{0 \leq i \leq k-1; u_i \in N_G(u_k)\}$; como todos os vértices em $N_G(u_0)$ e todos os vértices em $N_G(u_k)$ estão em \mathcal{P} , segue que $|A|, |B| \geq \frac{n}{2}$. Portanto,

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq n - k > 0,$$

uma vez que \mathcal{P} é um caminho em G com $k+1$ vértices.

Tome, então, $0 \leq i \leq k-1$ como na afirmação, e considere o ciclo

$$\mathcal{C} = (u_0, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{k-1}, u_k, u_i, u_{i-1}, \dots, u_1, u_0).$$

Afirmamos que \mathcal{C} é Hamiltoniano. Por contradição, suponha que algum vértice de G , digamos v , não esteja em \mathcal{C} . Tome um vértice w em \mathcal{C} , vizinho de v (tal vértice existe pelo princípio da casa dos pombos, pois \mathcal{C} tem mais de $\frac{n}{2}$ vértices e v tem pelo menos $\frac{n}{2}$ vizinhos). Renomeando os vértices de \mathcal{C} , podemos supor que

$$\mathcal{C} = (v_0, v_1, \dots, v_k, v_0),$$

com $v_0 = w$; mas aí, $\mathcal{P}_1 = (v, v_0, v_1, \dots, v_k)$ seria um caminho maior que \mathcal{P} em G , um absurdo. ■

2.4 Árvores

Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [1], [2] e [3].

Definição 2.8 *Uma árvore é um grafo conexo e acíclico.*



Figura 2.2: Uma árvore.

Se T é uma árvore, uma **folha** de T é um vértice de grau 1 e um **nó** de T é um vértice de grau maior que 1.

Lema 2.2 *Toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos duas folhas.*

Prova.

Seja T uma árvore com pelo menos dois vértices e considere em T um caminho \mathcal{C} com o maior comprimento possível. Se $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, afirmamos que u_1 e u_n são folhas. De fato, se fosse $d_T(u_1) \geq 2$, então u_1 seria adjacente a u_2 e a um outro vértice, u_0 digamos. Como árvores não contêm ciclos, deve ser $u_0 \neq u_3, \dots, u_n$. Daí, o caminho $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ teria comprimento maior que \mathcal{C} , o que é um absurdo. Logo, $d_T(u_1) = 1$ e, analogamente, $d_T(u_n) = 1$. ■

Proposição 2.2 *Se $T = (V; E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$.*

Prova.

Façamos indução sobre $|V|$. Inicialmente, é claro que toda árvore com dois vértices tem exatamente uma aresta. Suponha, como hipótese de indução, que toda árvore com $n > 1$ vértices tem exatamente $n - 1$ arestas, e considere uma árvore T com $n + 1$ vértices. Pelo lema anterior, T tem uma folha u ; portanto, $T - u$ é uma árvore com n vértices, e a hipótese de indução garante que $T - u$ tem $n - 1$ arestas. Mas como T tem exatamente uma aresta a mais que $T - u$, segue que T tem exatamente n arestas. ■

Corolário 2.1 *Se $G = (V; E)$ é um grafo conexo, então G contém pelo menos um ciclo se e só se $|E| \geq |V|$.*

Prova.

Suponha inicialmente que G contém pelo menos um ciclo, e mostremos que $|E| \geq |V|$ por indução sobre $|E|$. Se ϵ é uma aresta de um ciclo em G , então $G - \epsilon$ ainda é conexo e tem $|V|$ vértices e $|E| - 1$ arestas. Há, pois, duas possibilidades:

- $G - e$ ainda contém pelo menos um ciclo: segue da hipótese de indução que $|E| - 1 \geq |V|$;
- $G - e$ é acíclico: como ainda é conexo, $G - e$ é uma árvore, e a proposição anterior garante que $|V| = (|E| - 1) + 1 = |E|$.

Em qualquer caso, $|E| \geq |V|$.

Reciprocamente, se G for acíclico, então G é uma árvore, e a proposição anterior garante que $|E| = |V| - 1 < |V|$. ■

Corolário 2.2 *Seja $T = (V; E)$ um grafo conexo. Se $|E| = |V| - 1$, então T é uma árvore.*

Prova.

Se T contivesse pelo menos um ciclo, seguiria do corolário anterior que $|E| \geq |V|$, uma contradição. Logo, T é conexo e acíclico, donde uma árvore. ■

Capítulo 3

Planaridade

3.1 Representações e Cruzamentos

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [3].

Os dois diagramas na figura 3.1 representam o mesmo grafo, um K_4 com vértices a , b , c e d . Como os diagramas são bastante diferentes: na versão $K_4(1)$, as arestas ac e bd se cruzam; em $K_4(2)$ não há cruzamentos. Devemos nos referir aos dois diagramas como diferentes representações do grafo no plano. O **número de cruzamentos** de uma representação é o número de diferentes pares de arestas que se cruzam; o número de cruzamentos $v(G)$ de um grafo G é o número mínimo de cruzamentos em qualquer representação de G . Uma representação é chamada **planar** se não houver cruzamentos, e um **grafo planar** é um grafo que tem uma representação planar. Em outras palavras, um **grafo planar** G é aquele para o qual $v(G) = 0$. A figura 3.1 mostra que $v(K_4) = 0$.

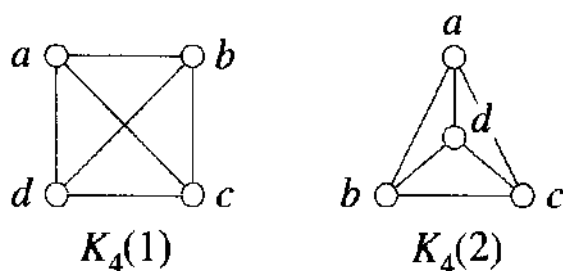


Figura 3.1: Duas representações de K_4 .

Há muitas aplicações de números de cruzamentos. Um uso precoce foi no projeto metroferroviários, onde é inconveniente ter diferentes linhas que se cruzam, é me-

lhor ter mais pista, em vez de cruzamentos extras. Uma extensão óbvia dessa ideia é o projeto autoestrada. Em um cruzamento complexo, menos cruzamentos significa menos viadutos caros. Mais recentemente, pequenos números de cruzamentos revelaram-se importantes no desenho de chips VLSI; se duas partes de um circuito não são para ser ligados eletricamente, mas eles se cruzam, é necessário um processo de isolamento dispendioso.

Definição 3.1 *Suponhamos que G é planar. Se um novo grafo foi construído através da inserção de um novo vértice de grau 2 no meio de uma aresta (dividindo uma aresta), ou por eliminação de um vértice de grau 2 e juntando os dois vértices adjacentes a ele, o novo grafo também será planar.*

Grafos que podem ser obtidos a partir de outro desta maneira são chamados homeomorfos.

Uma vez que K_5 e $K_{3,3}$ não são planares, segue-se que um grafo que tem K_5 ou $K_{3,3}$ como um subgrafo não pode ser planar. Além disso, um grafo que é homeomorfo a um grafo com subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$ não pode ser planar. Na verdade, Kuratowski provou que esta condição necessária para a planaridade também é suficiente.

Teorema 3.1 (Kuratowski) *G é planar se e somente se G é homeomorfo a um grafo que não contém subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.*

Este teorema foi apresentado pelo matemático polonês Kuratowski em 1930. A sua demonstração é bastante longa e complexa. Tem a virtude de fornecer uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo que não é dependente da sua representação gráfica. Não existe nenhum algoritmo nele baseado para testar a planaridade/não planaridade de um grafo. Na verdade, testar todos os subgrafos e verificar se são homeomorfos a K_5 ou a $K_{3,3}$ é uma tarefa árdua.

Exemplo 3.1 *Como aplicação mostramos na figura 3.2 que o grafo de Petersen não é planar.*

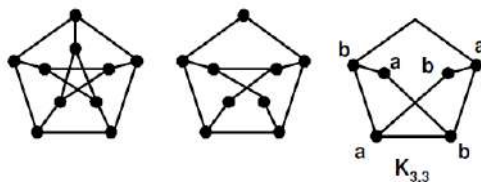


Figura 3.2: Grafo de Petersen e homeomorfos.

3.2 Fórmula de Euler

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [3].

Em cada plano de representação de um grafo conexo, o plano é dividido em regiões chamadas **faces**: uma **face** é uma área do plano totalmente rodeada por arestas do grafo, que não contém qualquer aresta. É conveniente definir uma **face exterior**, correspondente ao plano de representação exterior. Por exemplo, a face exterior é $abyz$ na Figura 3.2(a), e $abxyz$ na Figura 3.2(b). O ciclo $abxyz$ não é uma face na Figura 3.2(a), pois ele contém a aresta bz .

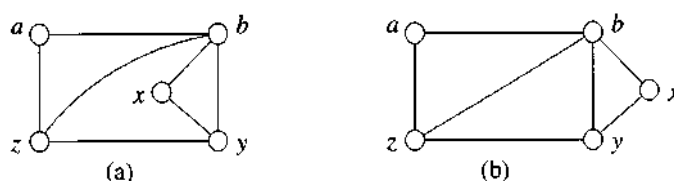


Figura 3.3: Diferentes faces em diferentes representações.

Teorema 3.2 (Fórmula de Euler) *Suponha que uma representação plana do grafo conexo G tem v vértices, e arestas e f faces. Então:*

$$v - e + f = 2. \quad (3.1)$$

Prova.

Por indução sobre e . É fácil ver que o teorema é válido quando e é pequeno: se $e = 0$, então o grafo deve ser K_1 , que tem $v = 1$ e $f = 1$; se $e = 1$ ou $e = 2$, nós temos um caminho com $e + 1$ vértices e uma face. Agora assumimos o teorema como verdadeiro para todos os grafos com E ou menos arestas, e suponha $e = E + 1$.

Se G é uma árvore, então $v = e + 1$ e $f = 1$, logo $v - e + f = e + 1 - e + 1 = 2$.

Caso contrário G contém um ciclo. Selecione uma aresta que se encontra neste ciclo. A aresta se encontrará separando duas faces (uma possivelmente pode ser a face exterior). Se for eliminado, obtém-se um grafo com uma aresta a menos e menos uma face do que o original. Se há E arestas assim, por indução, a equação (3.1) é satisfeita; em termos do grafo original,

$$v - (e - 1) + (f - 1) = 2,$$

e (3.1) segue. ■

Corolário 3.1 *Todas as representações planas do mesmo grafo planar conexo têm o mesmo número de faces.*

Prova.

Suponha que um grafo tem v vértices e e arestas; suponha que tem duas representações planas, com faces f e f' respectivamente. Então

$$v - e + f = 2 = v - e + f'$$

logo, $f = f'$. ■

Teorema 3.3 *Suponha que um grafo planar conexo G tem v vértices, e arestas e f faces, e nenhum componente tem menos de três vértices. Então $3f \leq 2e$.*

Prova.

O resultado é válido para P_2 ($e = 2, f = 1$), logo podemos assumir que cada face de G tem pelo menos três arestas. A matriz aresta-face adjacência A de G é a matriz $e \times f$ com entradas a_{ij} definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta de ordem } i \text{ encontra - se no limite da face de ordem } j \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

Seja σ a soma de todas as entradas de A . Cada fronteira de aresta tem no máximo duas faces, de modo que a soma de cada linha é, no máximo, 2. Há e linhas e, portanto $\sigma \leq 2e$. À medida que cada face tem pelo menos três arestas em sua fronteira, $3f \leq \sigma$. O resultado segue. ■

Teorema 3.4 *Se um grafo planar conexo tem v vértices e e arestas, onde $v \geq 3$, então $e \leq 3v - 6$.*

Prova.

Suponha que o grafo tem f faces. Pelo teorema anterior $3f \leq 2e$, logo $f \leq \frac{2e}{3}$. Pela Fórmula de Euler, $v - e + f = 2$, portanto $v - e + \frac{2e}{3} \geq 2$. Mas isto implica que $3v - e \geq 6$, e o teorema está provado. ■

Exemplo 3.2 *O grafo completo, K_v , não é planar para $v \geq 5$. Se $v \geq 5$, então K_v contém K_5 como subgrafo. Isso é suficiente para mostrar que K_5 não é planar. Suponha K_5 planar. Nós temos $v = 5, e = 10$, então $e > 3v - 6$, contradizendo o Teorema 3.4.*

Capítulo 4

Alguns Problemas Envolvendo Grafos

Este capítulo foi elaborado a partir das seguintes referências bibliográficas: [5], [6] e [7].

4.1 O Problema das Pontes de Königsberg

O primeiro e mais famoso problema em Teoria dos Grafos, resolvido por Euler em 1736. Na cidade de Königsberg sete pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme ilustrado na Figura 4.1 abaixo. Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?

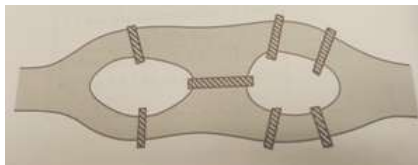


Figura 4.1: Ilhas no rio Pregel em Königsberg.

Euler transformou o problema em um problema de grafos. A cada margem e ilha associou um nó (vértice) e a cada ponte um arco (aresta), obtendo o grafo da figura 4.2. Em termos de grafos, o problema consiste em achar um passeio fechado que percorra cada aresta exatamente uma vez. Grafos para os quais isto é possível são chamados **eulerianos** (conforme vimos no Capítulo 2).

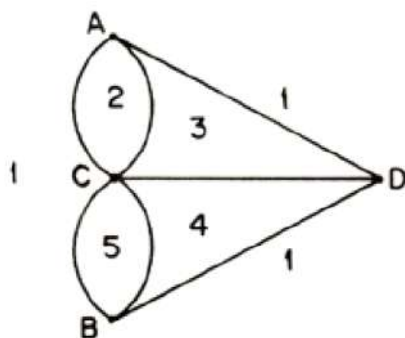


Figura 4.2: Representação em grafo do Problema das Pontes de Königsberg.

O desenho da figura 4.2, é provavelmente, o primeiro exemplo de um grafo a ocorrer como modelo matemático para resolver um problema, que agora se exprime assim: partindo de um dos vértices A, B, C, ou D, achar um caminho que percorra todo o grafo sem passar mais de uma vez pelo mesmo arco.

De um modo geral, um grafo é isto: um conjunto finito de pontos, chamados os vértices do grafo, e um conjunto finito de arcos, chamados as arestas do grafo. As extremidades de cada aresta devem ser vértices. Além disso, duas arestas quaisquer do grafo não podem ter pontos interiores em comum: ou são disjuntas ou se tocam apenas numa ou em duas das extremidades.

Euler chamou atenção para uma noção muito simples, porém crucial, que é a ordem de um vértice do grafo. A ordem de um vértice é o número de arcos que emanam dele. Por exemplo, no grafo das pontes de Königsberg, o vértice C tem ordem 5, enquanto os demais vértices A, B e D têm todos ordem 3.

Um caminho num grafo G é uma sequência finita $\lambda = (A_0, A_1, \dots, A_p)$, onde os A_i são vértices de G e, para cada $i = 1, 2, \dots, p$, A_{i-1} e A_i são extremidades de uma aresta de G.

Diz-se, neste caso, que o caminho λ parte do vértice A_0 e, percorrendo as arestas $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{p-1}A_p$, termina no vértice A_p .

Um caminho chama-se unicursal quando não percorre a mesma aresta mais de uma vez. Um grafo G chama-se unicursal quando existe um caminho unicursal que percorre todas as arestas de G. Observe-se que um caminho unicursal pode passar várias vezes pelo mesmo vértice.

Toda vez que um caminho unicursal chegar a um vértice, deve sair dele por um

arco diferente daquele por onde chegou. (A menos que esse vértice seja o fim do caminho.) Portanto, se um caminho unicursal percorrer todas as arestas do grafo, os vértices desse grafo, com exceção do início e do fim do caminho, devem ter todos um número par de arestas emanando deles, isto é, devem ter ordem par. O vértice que serviu de início e o que serviu de fim para o caminho têm ordem ímpar. Se o início e o fim do caminho coincidirem (isto é, se o caminho for fechado), então todos os vértices do grafo, sem exceção, têm ordem par.

Concluimos então que se um grafo é unicursal, ou todos os seus vértices têm ordem par ou exatamente dois vértices têm ordem ímpar. No primeiro caso, todo caminho unicursal é fechado. No segundo caso, um caminho unicursal deve começar num dos vértices de ordem ímpar e terminar no outro.

Segue-se, daí, que o grafo da figura 2 não é unicursal, pois seus quatro vértices têm todos ordem ímpar. Fica, então, resolvido o problema das sete pontes: é impossível percorrê-las todas, sem passar duas vezes por alguma ponte.

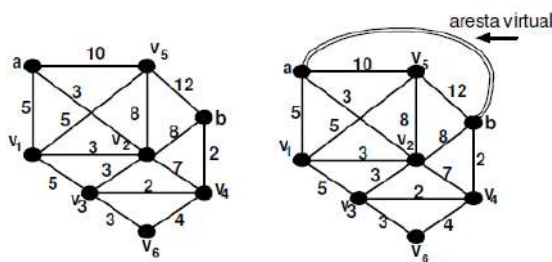
4.2 O Problema Chinês do Carteiro

Esse problema é uma aplicação bastante importante do conceito de grafo euleriano. Usamos um grafo valorado onde às arestas é associado um peso, isto é, uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Este peso pode representar comprimento, custo, tempo, ou o que a modelagem do problema exigir.

O problema chinês do carteiro (que tem este nome por ter sido apresentado pela primeira vez por um pesquisador chinês e não pela nacionalidade do carteiro) consiste em minimizar o esforço de um carteiro que percorre todas as ruas de uma cidade. Ora, se o grafo em questão é euleriano, não há problema. Mas se este não for o caso, teremos que eulerizar o grafo. Lembramos que o número de vértices de grau ímpar é par, logo poderemos unir pares destes vértices por novas arestas, tornando-os pares. É claro que não construiremos novas ruas! A ideia é fazer o carteiro percorrer ruas repetidas de forma econômica. O problema pode se complicar bastante, mas hoje há algoritmos que produzem resultados aproximados com bastante eficiência. É um problema bastante estudado devido à economia que uma boa solução pode gerar. Vamos ilustrar o caso mais simples possível, quando o grafo é semi-euleriano, isto é, quando tem apenas dois vértices de grau ímpar.

O menor caminho entre os vértices a e b indica que o melhor meio de eulerizar o grafo é construir uma aresta virtual entre a e b , o que significa simplesmente percorrer o caminho $av_2; v_2v_3; v_3v_4; v_4b$ como se fosse uma aresta. Assim, gastaremos menos a

sola do carteiro.



4.3 O Problema das 4 Cores

Em 1852 Frederick Guthrie, aluno de Augustus de Morgan, trouxe a este um problema proposto por seu irmão Francis Guthrie. Na verdade, tratava-se de uma conjectura, hoje um teorema.

Teorema das 4 cores. *Um mapa pode ser colorido com 4 cores.*

Colorir um mapa é colorir as regiões de maneira que regiões fronteiriças não sejam coloridas com a mesma cor. Usando a dualidade podemos formular o teorema em forma de coloração de vértices.

Teorema das 4 cores reformulação. *Num grafo planar G tem-se que $\chi(G) \leq 4$.*

O grafo K_4 mostra que 4 cores são necessárias, mas serão suficientes? O problema demorou um século para ser resolvido. Em 1976, Appel, Haken e Koch, com o auxílio de 1200 horas do computador mais rápido de sua época, executando mais do que 10^{10} operações computacionais, provaram o teorema.

As tentativas anteriores são, entretanto, dignas de nota. Kempe utilizou uma técnica (por isso chamada de cadeias de Kempe) e apresentou uma demonstração em 1879. Heawood, 11 anos depois, percebeu uma falha sutil na demonstração, que a invalidava. Entretanto, utilizou as cadeias de Kempe para demonstrar um resultado um pouco mais fraco. Começaremos por um lema.

Lema 4.1 *Num grafo planar há pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.*

Demonstração:

Já sabemos pelo Teorema de Euler que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Se $d(v) > 5, \forall v \in V$, então

$$6n \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

Mas num grafo planar temos $m \leq 3n - 6$, isto é, $2m \leq 6n - 12$.

Ficamos com $6n \leq 6n - 12$, o que é impossível.

■

Referências Bibliográficas

- [1] Neto, A. C. M., *Tópicos de Matemática Elementar Volume 4 Combinatória*, Rio de Janeiro: SBM (2012).
- [2] L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi, *Matemática Discreta*, Rio de Janeiro: SBM (2012).
- [3] Wallis, W. D., *A Beginner's Guide to Graph Teory*. Birkhauser, (2007).
- [4] P. Feofiloff, Y. Kohayakawa e Y. Wakabayashi, E., Gazzola, F., Weth, T., *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*,(2011).
- [5] Lima, E. L., *Matemática e Ensino*, Rio de Janeiro: SBM (2007).
- [6] Santos, J. P. O., Mello, M. P e Murari, I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. (2007)
- [7] Jurkiewicz, S. *Grafos - Uma Introdução*, OBMEP, (2009).